

UNIT KEGIATAN BELAJAR (UKB)

1. Identitas

- a. Nama Mata Pelajaran : Matematika X (Peminatan)
- b. Semester : ganjil
- c. Kompetensi Dasar :

3.1

Mendeskripsikan dan menentukan penyelesaian fungsi eksponensial dan fungsi logaritma menggunakan masalah kontekstual, serta keterkaitannya

4.1 Menyajikan dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan fungsi eksponensial dan fungsi logaritma

- d. Indikator Pencapaian Kompetensi :

3.1.1 Menjelaskan konsep persamaan logaritma

3.1.2 Menentukan penyelesaian persamaan logaritma

3.1.3 **Menafsirkan** masalah kontekstual persamaan logaritma

3.1.4 **Merumuskan** persamaan logaritma dari masalah kontekstual

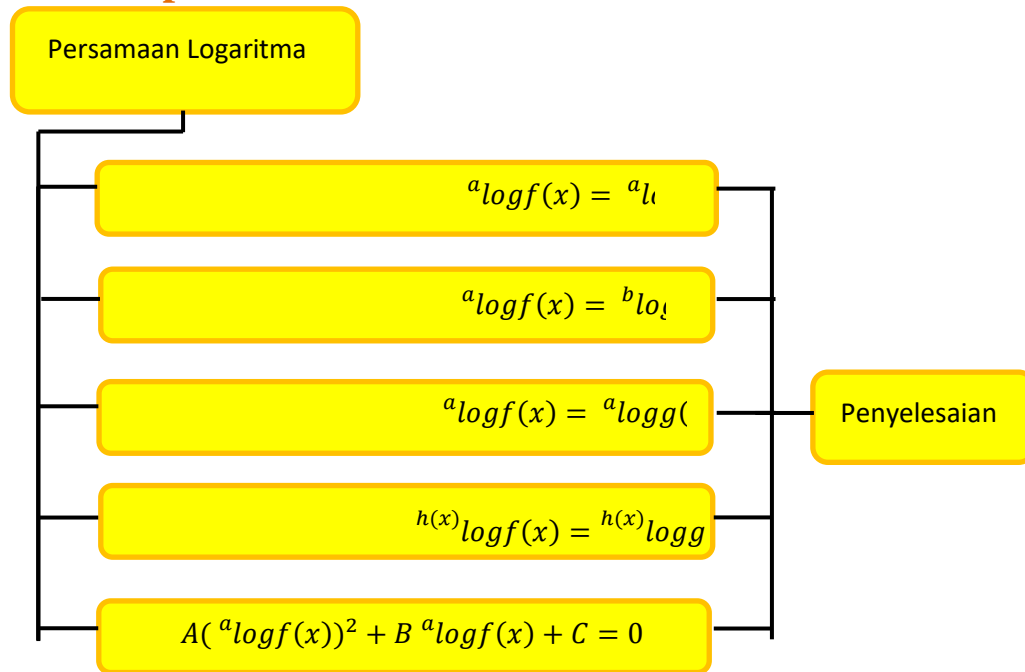
4.1.1 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan persamaan logaritma

- e. Materi Pokok : Fungsi, Persamaan dan Pertidaksamaan Eksponen dan logaritma
- f. Alokasi Waktu : 3x2 pertemuan
- g. Tujuan Pembelajaran :

Melalui diskusi, tanya jawab, penugasan, presentasi dan analisis, peserta didik dapat mendeskripsikan dan menentukan penyelesaian fungsi eksponensial dan fungsi logaritma menggunakan masalah kontekstual, serta keterkaitannya, juga dapat menyajikan dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan fungsi eksponensial dan fungsi logaritma, sehingga peserta didik dapat menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya, mengembangkan sikap jujur, peduli, dan bertanggung jawab, serta dapat mengembangkan kemampuan **berpikir kritis**,

- h. Materi Pembelajaran
 - o Lihat dan bacalah pada Buku Teks Pelajaran (BTP): B.K Noormandri. 2016. *Buku Matematika X Kelompok Peminatan*. Jakarta: Penerbit Erlangga, hal 24 sd 28.

2. Peta Konsep



3. Kegiatan Pembelajaran

a. Pendahuluan

Sebelum belajar pada materi ini, silahkan kalian membacakan dan memahami cerita di bawah ini.

- Menghitung pH suatu larutan, yang didefinisikan sebagai fungsi logaritma $p(t) = -\log t$ dengan t adalah konsentrasi ion hidrogen dalam mol/L. Jika diketahui $\text{pH}=7$. Berapa konsentrasi ion hidrogen?
- Rumus waktu paruh suatu unsur radioaktif dituliskan dalam bentuk eksponensial sebagai berikut $\frac{N_t}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ dengan T adalah waktu, t adalah lamanya waktu, N_0 adalah banyaknya unsur mula-mula, dan N_t adalah banyaknya unsur setelah t tahun. Jika diketahui waktu paruh unsur Carbon adalah 5.700 tahun dan sisa carbon yang terdapat pada fosil tersebut hanyalah 5%. Berapakah umur fosil yang ditemukan?

Pertanyaan: Dapatkah permasalahan diatas diselesaikan ?

Untuk dapat menyelesaikan persoalan tersebut, silahkan kalian lanjutkan kegiatan belajar berikut dan ikuti petunjuk yang ada dalam UKB ini.

b. Kegiatan Inti

- 1) Petunjuk Umum UKB

- a) **Baca dan pahami** materi pada buku B.K Noormandri. 2016. *Buku Matematika X Kelompok Peminatan*. Jakarta: Penerbit Erlangga, hal 24 sd 28.
- b) Setelah memahami isi materi dalam bacaan **berlatihlah untuk berfikir tinggi** melaluitugas-tugas yang terdapat pada UKB ini baik bekerja sendiri maupun bersama teman sebangku atau teman lainnya.
- c) **Kerjakan UKB** ini di buku kerja atau langsung mengisikan pada bagian yang telah disediakan.
- d) Kalian dapat **belajar bertahap dan berlanjut** melalui kegiatan **ayo berlatih**, apabila kalian yang sudah paham dan mampu menyelesaikan permasalahan-permasalahan dalam kegiatan belajar 1, 2, dan 3 kalian boleh sendiri atau mengajak teman lain yang sudah siap untuk **mengikuti tes formatif** agar kalian dapat belajar ke UKB berikutnya.

2) Kegiatan Belajar

Ayo.....ikuti kegiatan belajar berikut dengan penuh kesabarandan konsentrasi!!!

Kegiatan Belajar 1

Bacalah uraian singkat materi dan contoh berikut dengan penuh konsentrasi!

Pengertian persamaan logaritma

adalah persamaan yang mengandung variabel x dalam tanda logaritma atau persamaan yang mengandung variabel x sebagai bilangan pokok suatu logaritma

Contoh persamaan logaritma

Berikut ini adalah beberapa contoh persamaan logaritma.

1. ${}^2\log(x + 1) = {}^2\log 16$
2. ${}^3\log(x + 2) + {}^3\log(x + 2) = 2$
3. ${}^3\log(4x - 11) = {}^5\log(4x - 11)$
4. $2 \cdot {}^7\log x = {}^7\log(x + 2)$
5. ${}^{x+1}\log(x^2 - 3) = {}^{x+1}\log(x + 3)$
6. ${}^3\log^2 x - {}^3\log x^2 - 3 = 0$

Sifat Logaritma

Untuk menyelesaikan persamaan logaritma digunakan beberapa sifat logaritma yang telah dipelajari.

Jika x dan y bilangan real positif, m dan n bilangan real, dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$, demikian pula $b > 0$ dan $b \neq 0$, maka:

1. ${}^a\log x + {}^a\log y = {}^a\log xy$
2. ${}^a\log x - {}^a\log y = {}^a\log \frac{x}{y}$

3. ${}^a \log x^n = n {}^a \log x$
4. ${}^a \log b \cdot {}^b \log x = {}^a \log x$
5. ${}^a \log x = \frac{1}{{}^x \log a} = \frac{{}^b \log x}{{}^b \log a}$
6. ${}^{a^m} \log b^n = \left(\frac{m}{n}\right) {}^a \log b$
7. $b^{{}^b \log x} = x$
8. ${}^a \log a = 1$
9. ${}^a \log 1 = 0$

Ayo berlatih!

Setelah kalian memahami uraian singkat materi dan contoh di atas, maka:

Diberikan persamaan di bawah ini :

1. ${}^3 \log \frac{1}{27} - \frac{1}{2} \log 32 = x$
2. ${}^2 \log 32 + x = {}^{32} \log 2$
3. ${}^2 \log(2x - 1) = 3$
4. ${}^3 \log(x - 1) + {}^3 \log(x + 2) = {}^3 \log(2x + 2)$
5. $x^{-2} \log(8 - x) = 2$

Apakah semuanya merupakan persamaan logaritma?

Jelaskan jawaban mudantuliskan pada bukukerja kalian!

Apabila kalian telah mampu menyelesaikan soal di atas, maka kalian bisa melanjutkan pada kegiatan belajar 2 berikut.

Kegiatan Belajar 2

1. Persamaan logaritma berbentuk ${}^a \log f(x) = {}^a \log c, a > 0, a \neq 0$, maka $f(x) = c, f(x) > 0$

Contoh:

Tentukan penyelesaian ${}^2 \log(x^2 - 5x + 8) = 1$

jawab:

$${}^2 \log(x^2 - 5x + 8) = 1$$

$${}^2 \log(x^2 - 5x + 8) = {}^2 \log 2$$

$$x^2 - 5x + 8 = 2$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

jadi $x = 2$ atau $x = 3$

Contoh:

Tentukan penyelesaian $\log(x^2 + 3x - 3) = 0$

Jawab:

$$\log(x^2 + 3x - 3) = 0$$

$$\log(x^2 + 3x - 3) = \log 1$$

$$x^2 + 3x - 3 = 1$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x + 4)(x - 1) = 0$$

Jadi $x = -4$ atau $x = 1$

2. Persamaan logaritma berbentuk ${}^a \log f(x) = {}^b \log f(x)$, $a > 0, a \neq 0, a \neq b$ maka $f(x) = 1$

Contoh:

Tentukan penyelesaian ${}^5 \log(3x - 14) = {}^7 \log(3x - 14)$

Jawab:

$$3x - 14 = 1$$

$$3x = 15$$

$$\text{Jadi } x = 5$$

Contoh:

Tentukan penyelesaian ${}^5 \log(x^2 - x + 1) = {}^2 \log(x^2 - x + 1)$

Jawab:

$$x^2 - x + 1 = 1$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ atau } x = 1$$

3. Persamaan logaritma berbentuk ${}^a \log f(x) = {}^a \log g(x)$, $a > 0, a \neq 0$ maka $f(x) = g(x)$, $f(x) \neq 0$ dan $g(x) \neq 0$

Contoh:

Tentukan penyelesaian $\log(x^2 - 4x + 2) = \log(2 - x)$

Jawab:

$$x^2 - 4x + 2 = 2 - x$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$(x - 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ atau } x = 4$$

Untuk $x = 4$ tidak memenuhi $\log(2 - x)$ (**Mengapa?**)

Jadi $x = 0$ (**Mengapa?**)

Contoh:

Tentukan penyelesaian $\log(x^2 + 5x - 7) = \log(x - 2)$

Jawab:

$$x^2 + 5x - 7 = x - 2$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$(x - 1)(x + 5) = 0$$

$$x = 1 \text{ atau } x = -5$$

Tidak ada penyelesaian, mengapa?

Contoh:

Tentukan penyelesaian $\log(3x + 2) - 2 \log x = 1 - \log(5x - 5)$

Jawab:

$$\log(3x + 2) - 2 \log x = 1 - \log(5x - 5)$$

$$\log(3x + 2) - \log x^2 = \log 10 - \log(5x - 5)$$

$$\log \frac{3x + 2}{x^2} = \log \frac{10}{5x - 5}$$

$$\frac{3x + 2}{x^2} = \frac{10}{5x - 5}$$

$$\frac{3x + 2}{x^2} = \frac{2}{x - 1}$$

$$(3x + 2)(x - 1) = 2x^2$$

$$3x^2 - x - 2 = 2x^2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x = -1 \text{ atau } x = 2$$

Untuk $x = -1$ tidak memenuhi untuk $\log x$ (**Mengapa?**)

Jadi $x = 2$

4. Persamaan logaritma berbentuk ${}^{h(x)}\log f(x) = {}^{h(x)}\log g(x)$, maka $f(x) = g(x)$ dengan syarat $h(x) > 0, h(x) \neq 0$

Contoh:

Tentukan penyelesaian ${}^{x+3}\log(x+2) = {}^{x+3}\log(3x-2)$

Jawab:

$$x+2 = 3x-2$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Untuk $x = 2 \rightarrow x+2 = 2+2 = 4$

Untuk $x = 2 \rightarrow 3x-2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$

Untuk $x = 2 \rightarrow x+3 = 2+3 = 5$

Jadi penyelesaiannya adalah 2

Contoh:

Tentukan penyelesaian ${}^{2x-5}\log(2x+1) = {}^{2x-5}\log(x+4)$

Jawab:

$$2x+1 = x+4$$

$$x = 3$$

Apakah $x = 3$ merupakan penyelesaian, mengapa?

5. Persamaan logaritma berbentuk $A({}^a\log f(x))^2 + B {}^a\log f(x) + C = 0$ dengan $a > 0, a \neq 1, f(x) > 0, A, B$ dan $C \in R$. Dengan memisalkan ${}^a\log f(x) = y$

Contoh:

Tentukan penyelesaian $2 {}^2\log^2 x = 5 {}^2\log x - 3$

Jawab:

$$2 {}^2\log^2 x = 5 {}^2\log x - 3$$

$$2 {}^2\log^2 x - 5 {}^2\log x + 3 = 0$$

Misalkan ${}^2\log x = y$, sehingga

$$2y^2 - 5y + 3 = 0$$

$$(2y-1)(y-3) = 0$$

$$y = \frac{1}{2} \text{ atau } y = 3$$

$$y = \frac{1}{2} \rightarrow {}^2\log x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$y = 3 \rightarrow {}^2\log x = 3 \rightarrow x = 2^3 = 8$$

Jadi penyelesaiannya adalah $\sqrt{2}$ atau 8

Contoh:

Tentukan penyelesaian ${}^2\log^2 x - {}^2\log x^2 - 3 = 0$

Jawab:

$${}^2\log^2 x - {}^2\log x^2 - 3 = 0$$

$${}^2\log^2 x - 2 {}^2\log x - 3 = 0$$

Misalkan ${}^2\log x = y$, sehingga

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$(y+1)(y-3) = 0$$

$$y = -1 \text{ atau } y = 3$$

Untuk $y = -1$ maka ${}^2\log x = -1$

$$x = 2^{-1}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Untuk $y = 3$ maka ${}^2\log x = 3$

$$x = 2^3$$

$$x = 8$$

Jadi penyelesaiannya adalah $\frac{1}{2}$ atau 8

Ayo berlatih!!

Setelah memahami contoh di atas, maka selesaikanlah persamaan logaritma berikut di buku kerja kalian!

1. Tentukanlah penyelesaian persamaan berikut ini
 - a) ${}^2\log x + {}^2\log(x - 2) = 3$
 - b) ${}^2\log(x^2 - 2x + 1) = {}^2\log(2x^2 - 2)$
2. Tentukanlah penyelesaian persamaan berikut ini
$${}^3\log(x^2 - 5x + 7) = {}^7\log(x^2 - 5x + 7)$$
3. Tentukanlah penyelesaian persamaan berikut ini
 - a) $\log(2x - 3) + \log(x - 3) = \log 7$
 - b) $\log(3x + 2) - 2\log x = 1 - \log(5x - 3)$
 - c) ${}^2\log(x - 2) + {}^2\log(x - 3) = {}^{\frac{1}{3}}\log 2 \cdot {}^2\log \frac{1}{3}$
 - d) ${}^{0,25}\log(x - 4) + {}^{16}\log(x + 3) = 0$
 - e) $\log(\log(3x + 4) + 2) = \log 4$
4. Tentukanlah penyelesaian persamaan berikut ini
 - a) ${}^x\log(x^4 - 9x^2 + 9) = 2$
 - b) ${}^{x+1}\log(x^2 - 3) = {}^{x+1}\log(x + 3)$
 - c) ${}^{x+1}\log(x - 6) - \frac{1}{x+1}\log 8 = \frac{\log^2 5 - \log^2 2}{\log 2,5}$
 - d) $\frac{1}{2x-1\log x} + \frac{1}{x-6\log x} = \frac{1}{x+10\log x} + 1$
5. Tentukanlah penyelesaian persamaan berikut ini
 - a) ${}^2\log^2(2x - 2) - {}^2\log(2x - 2) = 2$
 - b) $x^{2\log x} = \frac{100}{x^3}$
 - c) $\log \log x = \log(\log x + 12) - \log \log x$
 - d) ${}^2\log x^{1+2\log x} = 2$
6. Jika x_1 dan x_2 adalah penyelesaian $\log\left(x - \frac{3}{x} + 14\right) = 1$. Tentukan nilai $x_1 + x_2$
7. Jika x_1 dan x_2 adalah penyelesaian $(4 - \log x)\log x = \log 1000$. Tentukan nilai $x_1 \cdot x_2$
8. Jika x_1 dan x_2 adalah penyelesaian $2 \cdot ({}^4\log x)^2 - 6({}^4\log \frac{x}{2}) + 1 = 0$.
Tentukan nilai $x_1 + x_2$

Apabila kalian sudah mampu menyelesaikan soal ini, maka kalian bisa melanjutkan pada kegiatan belajar 3 berikut.

Kegiatan Belajar 3

Ayo...sekarang perhatikan lagi contoh berikut ini dengan baik !

Bunga majemuk merupakan bunga yang menjadi pokok dari suatu simpanan. Istilah yang sering digunakan adalah bunga berbunga. Pembahasan lebih mendalam tentang teori ini sudah kita bahas tentang BUNGA MAJEMUK.

$$M_T = M \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$$

$$\frac{M_T}{M} = \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$$

$$\log \frac{M_T}{M} = \log \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$$

$$n = \frac{\log \frac{M_T}{M}}{\log \left(1 + \frac{P}{100}\right)} = \frac{\log M_T - \log M}{\log \left(1 + \frac{P}{100}\right)}$$

Seorang anak menabung di bank sebesar Rp. 1000.000,00 dengan bunga majemuk 20% pertahun. Berapa tahunkah uang tersebut ditabung agar uangnya menjadi Rp. 2.488.320,00 ?

Jawab :

Modal Awal : M = Rp.1.000.000,00

Modal Akhir : M_T = Rp. 2.488.320,00

Persentase bunga majemuk : P = 20%

Lamanya tabungan : n = ?

Untuk menjawab soal ini kita uraikan dari rumus menentukan Modal akhir suatu simpanan.

$$M_T = M \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$$

$$\frac{M_T}{M} = \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$$

$$\log \frac{M_T}{M} = \log \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$$

$$n = \frac{\log 2.488.320 - \log 1.000.000}{\log \left(1 + \frac{20}{100}\right)}$$

$$n = \frac{6,3959062302 - 6}{\log \frac{6}{5}} = \frac{0,3959062302}{\log 6 - \log 5}$$

$$n = \frac{0,3959062302}{0,7781512504 - 0,6989700043} = \frac{0,3959062302}{0,079181246} = 5,0000000025 = 5$$

Jadi, lama tabungan tersebut disimpan adalah 5 tahun.

Dari contoh penyelesaian di atas, apakah ada hal yang belum kalian pahami? Jika kalian sudah paham kerjakanlah soal pada bagian [Ayo berlatih](#) berikut!

Ayo berlatih!!

1. Pak Anto menginvestasikan uang sebesar Rp50.000.000,00 dengan tingkat bunga majemuk 24% per tahun yang dihitung bulanan. Apabila pak Anto ingin uangnya menjadi 3x lipat, berapa bulan ia harus menunggu?
2. Jika suatu barang yang dihasilkan sebanyak P unit per hari, dan selama t hari kerja produksi ditentukan oleh rumus fungsi $P = 200(1 - e^{-0,1t})$ dimana $e \approx 2,72$. Berapa hari harus diproduksi 100 unit.

Konsep mana yang kalian gunakan untuk menemukan jawaban tersebut? Dapatkah kalian **menuliskan rumus matematikanya?** Dapatkah kalian memberikan contoh permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang **penyelesaiannya menggunakan rumusan matematika** tersebut? Kerjakan bersama teman kalian di buku kerja masing-masing! Periksalah seluruh pekerjaan kalian kepada Guru agar dapat diketahui penguasaan materi sebelum kalian diperbolehkan belajar ke UKB berikutnya.

c. Penutup

Bagaimana kalian sekarang?

Setelah kalian belajar bertahap dan berlanjut melalui kegiatan belajar 1, 2, dan 3, berikut diberikan Tabel untuk mengukur diri kalian terhadap materi yang sudah kalian pelajari. Jawablah sejujurnya terkait dengan penguasaan materi pada UKB ini di Tabel berikut.


Tabel Refleksi Diri Pemahaman Materi

No	Pertanyaan	Ya	Tidak
1.	Apakah kalian telah memahami pengertian persamaan logaritma?		
2.	Dapatkah kalian menjelaskan Persamaan Logaritma?		
3.	Dapatkah kalian menyusun masalah kontekstual yang menjadi persamaan logaritma?		
4.	Dapatkah kalian menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan persamaan logaritma?		

Jika menjawab “TIDAK” pada salah satu pertanyaan di atas, maka pelajilah kembali materi tersebut dalam Buku Teks Pelajaran (BTP) dan pelajilah kegiatan belajar 1, 2, atau 3 yang sekiranya perlu kalian ulang dengan bimbingan Guru atau teman sejawat. **Jangan putus asa untuk mengulang lagi!** Dan apabila kalian menjawab “YA” pada semua pertanyaan, maka lanjutkan berikut.

Dimana posisi kamu?

Ukurlah diri kalian dalam menguasai materi Persamaan Logaritma dalam rentang 0 – 100, tuliskan ke dalam kotak yang tersedia.



Setelah kalian menuliskan penguasaan materi terhadap materi persamaan logaritma, lanjutkan kegiatan berikut untuk mengevaluasi penguasaan kalian!

Yuk Cek Penguasaan materi terhadap Materi persamaan logaritma!

Agar dapat dipastikan bahwa kalian telah menguasai materi Persamaan Logaritma, maka kerjakan soal berikut secara mandiri di buku kerja kalian masing-masing.

- 1) Manakah bentuk berikut ini yang merupakan persamaan logaritma dan berikanlah alasannya?
 - a) ${}^2\log 8 + {}^3\log \frac{1}{27} = \dots$
 - b) ${}^3\log x + {}^3\log(x + 1) = {}^3\log 2$
- 2) Tentukan penyelesaian persamaan logaritma di bawah ini :
 - a) ${}^6\log(x - 2) - {}^6\log(x - 3) = 1$
 - b) ${}^3\log(2x - 3) = {}^5\log(2x - 3)$
 - c) ${}^5\log(2x + 3) + {}^5\log(x + 1) = {}^5\log(4x + 18)$
 - d) ${}^x\log(x + 6) + {}^x\log(x - 1) = 2 + {}^x\log 2$
 - e) ${}^5\log x + 5 \cdot {}^x\log 5 - 6 = 0$
- 3) Penduduk suatu kota adalah 50.000 jiwa. Diasumsikan pertumbuhan penduduk ditentukan dengan rumus $p = 50.000(1,2)^{0,1 \cdot t}$. dimana t adalah jumlah penduduk setelah t tahun. Taksirlah berapa tahun jumlah penduduknya bertambah 50% dari semula.

4) Suatu model matematika menyatakan keterkaitan antara rata-rata berat badan w dalam kilogram dan tinggi badan h dalam meter dari anak berusia 5 sampai 13 tahun. Model matematika tersebut dinyatakan dengan fungsi $\log w = \log 2,4 + 0,8h$.

a) Jika anak berusia 9 tahun berat badannya 52 kg. Tulislah rumus untuk menghitung tinggi badan.

b) Hitunglah tinggi badan anak tersebut.

Suatu populasi binatang mengalami perkembangan yang dirumuskan $M_t =$

$75.000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{1-t}$. M_t adalah besar populasi pada saat t , t adalah waktu dalam tahun.

Agar besar populasi meningkat menjadi 4x lipat populasi awal. Tentukanlah waktu yang diperlukan.

Setelah menyelesaikan soal di atas dan mengikuti kegiatan belajar 1, 2, dan 3, **bagaimana** penyelesaian permasalahan pada menghitung konsentrasi ion hidrogen dan menghitung umur fosil tadi? Silahkan kalian berdiskusi dengan teman sebangkuan atau teman lain. Kemudian tuliskan penyelesaian matematika tersebut di buku kerja masing-masing!. Ini adalah bagian akhir dari UKB materi Persamaan Logaritma, mintalah tes formatif kepada Guru kalian sebelum belajar ke UKB berikutnya. **Sukses untuk kalian!!**